RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

FINANCES PUBLIQUES

ENFIP
ÉCOLE NATIONALE DES FINANCES PUBLIQUES

Examen probatoire au recrutement d'élèves internationaux désirant suivre le cycle de formation des Inspecteurs des Finances publiques en spécialité CADASTRE

Scolarité 2026-2027

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 sur **4** points

EXERCICE 2 sur **6** points

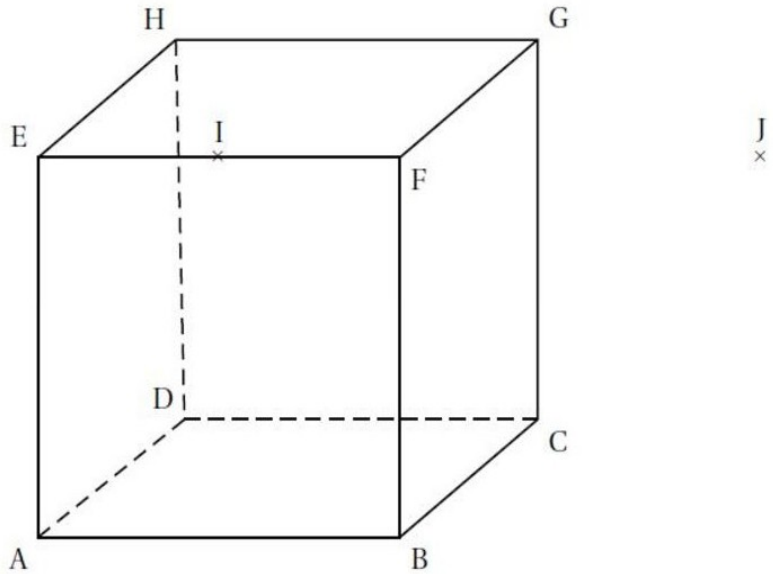
EXERCICE 3 sur **10** points

Les 3 exercices sont indépendants

Calculatrice autorisée, pas de documentation.

Exercice 1 - 4 points -

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On désigne par I le milieu du segment $[EF]$ et par J le symétrique de E par rapport à F.
On définit le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. *Déterminer les coordonnées des points I et J.*

2. *Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).*

3. *En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).*

4. *Calculer la distance du point F au plan (BGI).*

Exercice 2 - 6 points -

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit M *un point d'affixe* z *non nul. On désigne par* M' *le point d'affixe* z' *telle que*

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ *désigne le conjugué du nombre complexe* z.

A- Quelques propriétés

1. *Soit* z *un nombre complexe non nul.*

a. *Déterminer une relation entre les modules de* z *et* z'.

b. *Puis établir une relation entre les arguments de* z *et* z'.

2. *Démontrer que les points* O, M *et* M' *sont alignés.*

3. *Démontrer que pour tout nombre complexe* z *non nul, on a l'égalité suivante :*

$$\overline{z'+1} = \frac{1}{z} \times (z-1).$$

B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A *et* B *les deux points d'affixes respectives* 1 *et* -1.
On note $\mathscr{C}$ *l'ensemble des points* M *du plan dont l'affixe* z *vérifie :* $|z-1| = 1$.

1. *Quelle est la la nature de l'ensemble* $\mathscr{C}$?

2. *Soit* M *un point de* $\mathscr{C}$ *d'affixe* z, *distinct du point* O.

a. *Démontrer que :* $|z'+1| = |z'|$ *et interpréter géomètriquement cette égalité.*

b. *Démontrer que si* z' *vérifie l'égalité :* $|z'+1| = |z'|$, *alors* z *vérifie l'égalité :* $|z-1| = 1$.

Exercice 3 - 10 points -

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ *par :*

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. *Etudier les variations de la fonction g.*

2. *Déterminer le signe de* $g(x)$ *suivant les valeurs de* x.

3. *En déduire que pour tout* $x \in [0\,;+\infty[,\ e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ *par :*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Soit la courbe $(\mathscr{C})$ *représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.*
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in [0\,;1],\ f(x) \in [0\,;1]$

2. *Soit* (D) *la droite d'équation* $y = x$.

a. *Montrer que pour tout* $x \in [0\,;1],\ f(x) - x = \dfrac{(1-x) \times g(x)}{e^x - 1}$.

b. *Etudier la position relative de la droite* (D) *et de la courbe* $(\mathscr{C})$ *sur* $[0\,;1]$.

3. a *Déterminer une primitive de f sur* $[0;1]$.

b. *Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par :*
la courbe $(\mathscr{C})$, *la droite* (D) *et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$.

Partie C

On considère, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_o = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. *Montrer que tout entier naturel n,* $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leq u_{n+1} \leqslant 1$.

2. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*